А. А. Горшков

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, tiger-nn@mail.ru

О ПОИСКЕ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ДВОЙСТВЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Доклад посвящен конструированию на основе идеологии двойственной регуляризации [1] алгоритма поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций вида $F(z,\lambda)$, $(z,\lambda) \in Z \times \times \Lambda$, где Z, Λ — пара гильбертовых пространств. Под выпукло-вогнутыми функциями, заданными на произведении двух гильбертовых пространств $Z \times \Lambda$, понимаются функции, выпуклые по одной переменной z и вогнутые по другой переменной λ. Задачи поиска седловых точек таких функций возникают в самых различных приложениях, среди которых можно выделить, в первую очередь, приложения, связанные с вопросами математической экономики [2].

В данной работе предполагается, что функция $F(z,\lambda)$ сильно выпукла по z с постоянной $\varkappa > 0$. Предполагается также, что функция $F(z,\lambda)$ дифференцируема по Фреше по переменным z и λ, а также локально липшицева по переменной z при каждом λ:

$$|F(z_1,\lambda) - F(z_2,\lambda)| \leqslant L_M \|z_1 - z_2\|,$$

$$\forall z_1, z_2 \in Z \cap S_M,\ L_M = \mathrm{const} > 0,\ S_M \equiv \{z \in Z : \|z\| \leqslant M\}.$$

Предполагая непустоту множества седловых точек функции $F(z,\lambda)$, рассмотрим двойственную задачу:

$$\varphi(\lambda) \to \max, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \varphi(\lambda) \equiv \min_{z \in Z} F(z,\lambda). \tag{1}$$

Множество решений этой задачи в рассматриваемой ситуации не пусто. Обозначим его через Λ_m. Введем также обозначение

$$z[\lambda] \equiv \arg\min\{F(z,\lambda), z \in Z\}.$$

Можно утверждать, что каждая точка $\overline{\lambda}$ множества Λ_m в паре с точкой $z[\overline{\lambda}]$ образуют седловую точку функции $F(z,\lambda)$.

Суть предлагаемого алгоритма двойственной регуляризации [1] для поиска седловых точек функции $F(z,\lambda)$ заключается в решении на основе метода стабилизации или, другими словами, метода регуляризации Тихонова (см., например, [3]) двойственной задачи (1). Этот алгоритм представляет собой процедуру решения при каждом фиксированном значении параметра регуляризации $\alpha > 0$ с одновременным его стремлением к нулю задачи максимизации

$$R^\alpha(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{2}$$

с сильно вогнутым функционалом R^α. Точки максимума λ_α регуляризованной задачи (2) сходятся при $\alpha \to 0$ ко множеству решений двойственной задачи (1), а именно, к решению λ_m с минимальной нормой: $\|\lambda_m\| = \min\limits_{\lambda\in\Lambda_m} \|\lambda\|$.

Предположим, что в результате определенного числа итераций того или иного численного алгоритма (например, классического алгоритма градиентного подъема [3]) в нашем распоряжении имеется точка λ_α^ϵ, такая, что

$$R^{\alpha*} \equiv \max_{\lambda\in H} R^\alpha(\lambda) \geqslant R^\alpha(\lambda_\alpha^\epsilon) \geqslant R^{\alpha*} - \epsilon,$$

где ϵ — характеристика точности решения задачи (2).

Точки λ_α^ϵ, являющиеся приближениями по функции решения задачи (3), сходятся к нормальному решению λ_m задачи (1) при согласованном стремлении к нулю параметра регуляризации α и величины ϵ, характеризующей точность решения задачи (2). Этот факт сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие согласования*

$$\epsilon/\alpha \to 0, \quad \epsilon \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Тогда элементы λ_α^ϵ сходятся в норме пространства Λ ко множеству решений задачи (1). *Более того, справедливо предельное соотношение $\lambda_\alpha^\epsilon \to \lambda_m$ при $\epsilon \to 0$, $\alpha \to 0$.*

Таким образом, пара $(z[\lambda_m], \lambda_m)$ образует искомую седловую точку функции $F(z, \lambda)$.

Центральную роль при обосновании обсуждаемого алгоритма играет

Теорема 2. *Производная Фреше функции $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, в точке λ имеет вид*

$$\varphi'(\lambda) = F'_\lambda(z[\lambda], \lambda),$$

где $F'_\lambda(z, \lambda)$ — производная Фреше по λ функции $F(z$; в точке λ.

В процессе обоснования алгоритма двойственной регуляр и-зации для поиска седловых точек и, в первую очередь, док а-зательства теоремы 2 существенно используется аппарат с о-временного негладкого анализа, связанный с понятиями про к-симальной нормали к замкнутому множеству, проксимальнс го субградиента полунепрерывной снизу функции, обобщенн го градиент Кларка [4].

Благодарю своего научного руководителя профессора М. И. Сумина за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)" Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт НК-13П-13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумин М. И. *Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 602-625.

2. Обен Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988.

3. Васильев Ф. П. *Методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1981.

4. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. *Nonsmooth analysis and control theory. Graduate Texts in Mathematics.* – New-York: Springer-Verlag, 1998. – V. 178.